## 2.7.12 Počítání s odmocninami I

**Předpoklady:** 020711

**Pedagogická poznámka:** Počítání s odmocninami původně představovalo pouze dvě hodiny, ale neustále se opakovaly problémy se stíháním, proto byly původní hodiny rozděleny na tři a trochu doplněny dalšími příklady.

V prvním ročníku jsme měli vzorce pro počítání s druhou odmocninou. Teď je zopakujeme a rozšíříme na *n*-tou odmocninu.

**Pro všechna nezáporná reálná čísla** $a,b$ **a pro každé přirozené číslo** $n$ **platí:**
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

**Důkaz:**
$\sqrt[n]{a}=s\Rightarrow a=s^n$ , $\sqrt[n]{b}=t\Rightarrow b=t^n$
Dosadíme: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt{s^nt^n}=\sqrt[n]{(st)^n}=st=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ (to jsme chtěli).

Předchozí pravidlo můžeme rozšířit pro více čísel.

**Př. 1:** Dokonči následující větu tak, aby byla rozšířením pravidla $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ pro více čísel: „Pro všechna přirozená čísla ***n, r*** a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1,a_2...a_r$ platí:“

Proměnná *n* udává stupeň odmocniny, proměnná *r* počet čísel, které pod odmocninou násobíme. $\Rightarrow$
Pro všechna přirozená čísla ***n, r*** a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1,a_2...a_r$ platí:
$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_r}=\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot...\cdot\sqrt[n]{a_r}$ .

**Pro všechna přirozená čísla** $n$, $r$ **a pro všechna nezáporná reálná čísla** $a_1,a_2...a_r$ **platí:** $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_r}=\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot...\cdot\sqrt[n]{a_r}$

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je trošku netradiční, ale velmi potřebný, když chceme, aby studenti vůbec vnímali smysl vět podobného typu. Problém je s písmeny *n* a *r*, někteří žáci píší například $\sqrt[n\cdot r]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_r}=\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{a_2}\cdot...\cdot\sqrt[n]{a_r}$ nebo $\sqrt[n\cdot r]{a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_r}=\sqrt[n\cdot r]{a_1}\cdot\sqrt[n\cdot r]{a_2}\cdot...\cdot\sqrt[n\cdot r]{a_r}$ . Nejdříve si tedy vyjasníme, co představují. Také se ptám, jak by začátek věty musel vypadat, aby se tato písmena ve vzorci prohodila („Pro všechna přirozená čísla ***n, r*** a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1,a_2...a_n$ platí:“).

Podobný vztah existuje i pro dělení.

**Pro všechna nezáporná reálná čísla $a$, všechna kladná reálná čísla $b$ a pro každé přirozené číslo $n$ platí:**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**Př. 2:** Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy.

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}$ c) $\sqrt[4]{64}$ d) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}$

a) $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt{7\cdot 3}\cdot\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=$
$\left(\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{2}\right)^2=3\cdot 2\cdot 7=42$

c) $\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{16\cdot 4}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{4}=2\cdot\sqrt[4]{4}$ (výraz jde upravovat dál, uvidíme později)

d) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 8}=\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{8}=3\cdot 2=6$

**Př. 3:** Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$ c) $\sqrt{\frac{14}{9}}\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}$

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}=\sqrt[3]{\frac{4}{32}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{14}{9}}\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}=\sqrt{\frac{14\cdot 8}{9\cdot 7}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$

**Př. 4:** Částečně odmocni.

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{50}$

e) $\sqrt[3]{24}$ f) $\sqrt[4]{48}$ g) $2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt{24}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ b) $\sqrt{12}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{18}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{50}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$ f) $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{6}=\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}$

g) $2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{6}+4\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+8\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

**Př. 5:** Zjednoduš.

a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ b) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$

c) $\sqrt[3]{12}\left(\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{4}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}\right)$

a)
$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}=\sqrt{2}\sqrt{3}-2-\sqrt{3}\sqrt{2}+3=1$

b)

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=$

$=\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{6}-\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{6}+\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt{6}=$

$2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}-3+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6=-7+6\sqrt{2}$

c)

$\sqrt[3]{12}\left(\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{4}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=$

$=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=2\cdot3-2\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{3}-2=$

$4-2\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{3}=2\left(2-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)$

**Př. 6:** Dokaž větu o vzorci $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

**Důkaz:**

$\sqrt[n]{a}=s\Rightarrow a=s^n$, $\sqrt[n]{b}=t\Rightarrow b=t^n$

Dosadíme: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{s^n}{t^n}}=\sqrt[n]{\left(\frac{s}{t}\right)^n}=\frac{s}{t}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\Rightarrow\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (to jsme chtěli).

**Př. 7:** Petáková:
strana 59/cvičení 19 c) e) i)
strana 59/cvičení 20 b) c) f)
strana 60/cvičení 21 a) c)
strana 60/cvičení 22 d)
strana 60/cvičení 23 d)
strana 60/cvičení 24 a)

**Shrnutí:** Odmocninu můžeme "roztrhnout" jen přes násobení nebo dělení.